Statistique/*Statistics*

Théorème de limite centrale et loi du logarithme itéré pour les algorithmes des moindres carrés en poursuite adaptative

Bernard Bercu

Résumé – Pour les modèles autorégressifs contrôlés, on établit, en poursuite adaptative, un théorème de limite centrale et une loi du logarithme itéré sur les algorithmes des moindres carrés traditionnels et pondérés.

Central limit theorem and law of iterated logarithm for least squares algorithms in adaptative tracking

Abstract – *In adaptative tracking, we establish, for the controled autoregressive models, a central limit theorem and a law of iterated logarithm for the usual and the weighted least squares algorithms.*

1. Introduction. – Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilité muni d'une filtration $F = (\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$. On considère le modèle autorégressif contrôlé d'ordre p et de dimension d défini, pour tout $n \geqq 0$, par

$$X_{n+1} = {}^t\theta\, \Phi_n + U_n + \varepsilon_{n+1}, \tag{1}$$

où X et ε sont respectivement l'observation et le bruit associés au système, U est un contrôle dont on a le choix et ${}^t\Phi_n = ({}^tX_n, \ldots, {}^tX_{n-p+1})$. Pour estimer la matrice inconnue θ, on utilise l'algorithme des moindres carrés pondérés satisfaisant, pour tout $n \geqq 0$, la relation

$$\hat{\theta}_{n+1} = \hat{\theta}_n + a_n\, S_n^{-1}(a)\, \Phi_n^t\, (X_{n+1} - U_n - {}^t\hat{\theta}_n\, \Phi_n) \tag{2}$$

$$S_n(a) = \sum_{k=0}^{n} a_k\, \Phi_k\, {}^t\Phi_k + S \tag{3}$$

où la valeur initiale $\hat{\theta}_0$ est choisie arbitrairement et S est une matrice déterministe, symétrique et inversible. On pose

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \Phi_k\, {}^t\Phi_k + S, \qquad s_n = \operatorname{tr}(S_n). \tag{4}$$

Le choix de la pondération $a = (a_n)$ est fondamental. Si

$$a_n = 1 \tag{5}$$

on retrouve l'algorithme des moindres carrés traditionnels. Par contre, si

$$a_n = \left(\frac{1}{\log s_n}\right)^{1+\gamma} \tag{6}$$

Note présentée par Jean-Pierre Kahane.

0764-4442/95/03200493 $ 2.00

avec $\gamma > 0$, on est en présence de l'algorithme des moindres carrés pondérés proposé par Duflo et Bercu [3], [4]. De nombreux résultats ont été obtenus sur la consistance et l'optimalité en poursuite adaptative ([3], [4], [7], [10], [12] et [15]). Dans ces articles, il était toujours nécessaire d'établir une propriété d'excitation persistante sur la suite régressive $\Phi = (\Phi_n)$. On précise ces résultats en prouvant une propriété de convergence presqure sûre de la suite matricielle (S_n). On montre également un théorème de limite centrale et une loi du logarithme itéré pour les algorithmes des moindres carrés traditionnels et pondérés. Des résutlats analogues sont obtenus pour les modèles **ARMA** contrôlés dans [5].

2. Consistance et optimalité. – On se donne une trajectoire de référence prévisible $x = (x_n)$, à poursuivre, pas à pas, par l'observation $X = (X_n)$. A cette fin, on utilise le contrôle de poursuite proposé par Aström et Wittenmark [1] donné, pour tout $n \geqq 0$, par

$$U_n = x_{n+1} - {}^t\hat{\theta}_n \, \Phi_n. \tag{7}$$

La relation (1) peut alors s'écrire sous la forme

$$X_{n+1} - x_{n+1} = \pi_n + \varepsilon_{n+1} \tag{8}$$

avec $\pi_n = {}^t(\theta - \hat{\theta}_n)\,\Phi_n$. On suppose, dans toute la suite, que la trajectoire x possède la même régularité en norme que ε et p.s.

$$\sum_{k=1}^{n} \| x_k \|^2 = o(n). \tag{9}$$

On suppose également que le bruit ε vérifie

$$E[\varepsilon_{n+1} \,|\, \mathcal{F}_n] = 0, \qquad E[\varepsilon_{n+1}\, {}^t\varepsilon_{n+1} \,|\, \mathcal{F}_n] = \Gamma \tag{10}$$

où Γ est une matrice de covariance déterministe inversible. On suppose finalement que ε satisfait la loi forte des grands nombres *i.e.* si

$$\Gamma_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k \, {}^t\varepsilon_k, \tag{11}$$

Γ_n converge p.s. vers Γ. Le coût de la poursuite se mesure par la suite matricielle (C_n) avec

$$C_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (X_k - x_k)\, {}^t(X_k - x_k). \tag{12}$$

La poursuite est optimale en moyenne si C_n converge p.s. vers Γ. Soit L la matrice carrée bloc diagonale d'ordre $\delta = dp$

$$L = \mathrm{diag}(\Gamma, \ldots, \Gamma). \tag{13}$$

Théorème 1. – *On suppose que ε admet un moment d'ordre > 2 fini. Alors, pour l'algorithme des moindres carrés, on a*

$$\frac{S_n}{n} \to L \quad \text{p.s.} \tag{14}$$

De plus, la poursuite est optimale

(15) $$\| C_n - \Gamma_n \| = O\left(\frac{\log n}{n}\right) \quad \text{p.s.}$$

On peut préciser (15) *car*

(16) $$\frac{1}{\log n} \sum_{k=1}^{n} (X_k - x_k - \varepsilon_k)^t (X_k - x_k - \varepsilon_k) \to \delta \Gamma \quad \text{p.s.}$$

Finalement, $\hat{\theta}_n$ *est un estimateur fortement consistant de* θ

(17) $$\| \hat{\theta}_n - \theta \|^2 = O\left(\frac{\log n}{n}\right) \quad \text{p.s.}$$

THÉORÈME 2. – *On suppose que* ε *est soit un bruit blanc, soit qu'il admet un moment d'ordre* > 2 *fini. Alors, pour l'algorithme des moindres carrés pondérés par* $a_n^{-1} = (\log s_n)^{1+\gamma}$ *avec* $\gamma > 0$, *on a*

(18) $$(\log n)^{1+\gamma} \frac{S_n(a)}{n} \to L \quad \text{p.s.}$$

De plus, la poursuite est optimale

(19) $$\| C_n - \Gamma_n \| = o\left(\frac{(\log n)^{1+\gamma}}{n}\right) \quad \text{p.s.}$$

Finalement, $\hat{\theta}_n$ *est un estimateur fortement consistant de* θ

(20) $$\| \hat{\theta}_n - \theta \|^2 = O\left(\frac{(\log n)^{1+\gamma}}{n}\right) \quad \text{p.s.}$$

Remarque. – Le théorème 2 est semblable au théorème 1. Il n'est toutefois pas nécessaire d'y imposer un moment d'ordre > 2 fini sur le bruit ε. Par contre, on observe une perte en $(\log n)^\gamma$ sur les vitesses de convergence.

3. THÉORÈME DE LIMITE CENTRALE ET LOGARITHME ITÉRÉ. – Grâce au théorème de limite centrale sur les tableaux triangulaires ([13], [16], [19]) et à la loi du logarithme itéré sur les martingales ([11], [17], [18]), on montre le résultat suivant :

THÉORÈME 3. – *On suppose que* ε *admet un moment d'ordre* > 2 *fini. Alors, pour les algorithmes des moindres carrés traditionnels et pondérés, on a le théorème de limite centrale*

(21) $$\sqrt{n}\,(\hat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,\, L^{-1} \otimes \Gamma).$$

Pour tous vecteurs non nuls $u \in \mathbf{R}^d$ *et* $v \in \mathbf{R}^\delta$, *on a également la loi du logarithme itéré*

(22) $$\begin{aligned} &\limsup_{n\to\infty} \left(\frac{n}{2 \log \log n}\right)^{1/2} {}^t v\,(\hat{\theta}_n - \theta)\, u \\ &= -\liminf_{n\to\infty} \left(\frac{n}{2 \log \log n}\right)^{1/2} {}^t v\,(\hat{\theta}_n - \theta)\, u \\ &= ({}^t v\, L^{-1}\, v)^{1/2}\, ({}^t u\, \Gamma\, u)^{1/2} \quad \text{p.s.} \end{aligned}$$

En particulier,

$$(23)\qquad \left(\frac{\lambda_{\min}\Gamma}{\lambda_{\max}\Gamma}\right) \leqq \limsup_{n\to\infty}\left(\frac{n}{2\log\log n}\right)\|\hat{\theta}_n-\theta\|^2 \leqq \left(\frac{\lambda_{\max}\Gamma}{\lambda_{\min}\Gamma}\right) \quad \text{p.s.}$$

Remarque. – $L^{-1}\otimes\Gamma = \operatorname{diag}(\Gamma^{-1}\otimes\Gamma, \cdots, \Gamma^{-1}\otimes\Gamma)$. De plus, on peut éviter la contrainte (9) sur la trajectoire x. Il suffit de supposer que

$$(24)\qquad \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\,{}^t x_k \to C \quad \text{p.s.}$$

où C est une matrice de covariance déterministe et de remplacer, dans (13), Γ par $\Gamma + C$.

Note remise le 8 décembre 1994, acceptée le 13 décembre 1994.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] K. J. Aström et B. Wittenmark, On self tuning regulators, *Automatica*, 9, 1973, p. 185-199.

[2] B. Bercu, Sur l'estimateur des moindres carrés généralisé d'un modèle ARMAX. Application à l'identification des modèles ARMA, *Ann. Inst. H. Poincaré*, 27, 1991, p. 425-443.

[3] B. Bercu et M. Duflo, Moindres carrés pondérés et poursuite, *Ann. Inst. H. Poincaré*, 28, 1992, p. 403-430.

[4] B. Bercu, Weighted estimation and tracking for ARMAX models, *SIAM J. Control Optim.*, 33, 1995.

[5] B. Bercu, Central limit theorem and law of iterated logarithm for least squares algorithms in adaptative tracking, 1994, submitted for publication.

[6] H. F. Chen et L. Guo, Convergence rate of least squares identification and adaptive control for stochastic systems, *Int. J. Control*, 44, 1986, p. 1459-1476.

[7] H. F. Chen et J. F. Zhang, Convergence rates in stochastic adaptive tracking, *Internat. J. Control*, 49, 1989, p. 1915-1935.

[8] H. F. Chen et L. Guo, *Identification and stochastic adaptive control*, Birkhäuser, Boston, 1991.

[9] Y. S. Chow et H. Teicher, *Probability theory: Independence, interchangeability and martingales*, Springer Verlag, Berlin, 1978.

[10] M. Duflo, *Méthodes récursives aléatoires*, Masson, Paris, 1990.

[11] M. Duflo, R. Senoussi et A. Touati, Sur la loi des grands nombres pour les martingales vectorielles et l'estimateur des moindres carrés d'un modèle de régression, *Ann. Inst. H. Poincaré*, 26, 1990, p. 549-566.

[12] L. Guo et H. F. Chen, The Aström-Witenmark self-tuning regulator revisited and ELS-based adaptive trackers, *IEEE Trans. Automat. Control*, 36, 1991, p. 802-812.

[13] D. Hall et C. Heyde, *Martingale limit theory and its applications*, Academic Press, New York, 1980.

[14] T. L. Lai et C. Z. Wei, Extended least squares and their applications to adaptive control and prediction in linear sytems, *IEEE Trans. Automat. Control*, AC-31, 1986, p. 898-906.

[15] T. L. Lai et C. Z. Wei, On the concept of excitation in least squares identification and adaptive control, *Stochastics*, 16, 1986, p. 227-254.

[16] R. S. Lipster et A. N. Shiryaev, A functional central limit theorem for semimartingales, *Theory Probab. Appl.*, 25, 1980, p. 667-688.

[17] W. F. Stout, *Almost sure convergence*, Academic Press, New York, 1970.

[18] W. F. Stout, A martingale analogue of Kolmogorov's law of the iterated logarithm, *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie*, 15, 1970, p. 279-290.

[19] A. Touati, On the functional convergence in distribution of sequences of semimartingales to a mixture of brownian motions, *Theory Probab. Appl.*, 36, 1991, p. 752-771.

[20] A. Touati, Vitesse de convergence de l'estimateur des moindres carrés dans le modèle autorégressif, 1994 (à paraître).

Laboratoire de Statistiques, Bat. n° 425, Mathématiques,
Université de Paris-Sud, 91405 Orsay Cedex, France.